Primer Parcial - ANÁLISIS II (C) - Curso de Verano - 20/2/06

Ricardo Testoni

Nota: Por supuesto que las soluciones que se dan aquí, no son las únicas posibles. Si encuentran errores, avisen!

Ejercicio 1: Para los distintos valores de $p \in \mathbb{R}$ analizar la convergencia de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p\sqrt{1+x}}\, dx.$$

Por definición:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p\sqrt{1+x}}\, dx = \int_0^{1} \frac{1}{x^p\sqrt{1+x}}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p\sqrt{1+x}}\, dx = I_1 + I_2,$$

y hay que estudiar la convergencia de I_1 e I_2.

Veamos primero I_1:

Como $\frac{1}{x^p} > 0$ y $\frac{1}{x^p\sqrt{1+x}} > 0$ y como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^p\sqrt{1+x}}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1$$

no es ni infinito ni 0 entonces, por el criterio de comparación "via límites", $\int_0^1 \frac{1}{x^p\sqrt{1+x}}\, dx$ y $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\, dx$ tienen el mismo comportamiento. Pero esta última sabemos (de la práctica) que converge si $p < 1$ y diverge si $p \geq 1$. Luego lo mismo pasa con I_1.

Ahora veamos I_2:

Como $\frac{1}{x^{p+1/2}} > 0$ y $\frac{1}{x^p\sqrt{1+x}} > 0$ y como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^p\sqrt{1+x}}}{\frac{1}{x^{p+1/2}}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{x}{1+x}} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{1}{1+1/x}} = 1$$

no es ni infinito ni 0 entonces, por el criterio de comparación "via límites", $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p\sqrt{1+x}}\, dx$ y $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{p+1/2}}\, dx$ tienen el mismo comportamiento. Pero esta última sabemos (de la práctica) que converge si $p+1/2 > 1$ y diverge si $p+1/2 \leq 1$. Luego I_2 converge si $p > 1/2$ y diverge si $p \leq 1/2$.

Juntando los dos análisis se tiene que integral converge si, y sólo si, $1/2 < p < 1$.

Ejercicio 2: Calcular con error menor que $0,01$ la integral

$$\int_0^{2} \frac{e^{-x/2}-1}{x}\, dx.$$

Primero observemos que, como

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x/2}-1}{x} = -\frac{1}{2}$$

entonces el integrando es acotado y continuo salvo en 0 (donde hay una discontinuidad evitable) y por lo tanto existe la integral.

Sabemos que

$$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. En particular (si $t = -x/2$) se tiene que

$$e^{-x/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^n = 1 + x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{n-1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Luego

$$\frac{e^{-x/2} - 1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{n-1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como las series de pontencias se pueden integrar término a término dentro del rádio de convergencia entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{e^{-x/2} - 1}{x} dx &= \int_0^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_0^2 x^{n-1} dx = \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left. \frac{x^n}{n} \right|_0^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!n}.
\end{aligned}$$

Pero $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!n}$ es una serie alternada y claramente $\frac{1}{n!n}$ es decreciente y tiene límite 0. Por lo tanto (criterio de Leibniz) $\sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^n}{n!n}$ aproxima a $\int_0^2 \frac{e^{-x/2}-1}{x} dx$ con error menor que

$$\frac{1}{5!5} < 0,01.$$

Ejercicio 3: Decidir si la función

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(xy)}{2x+y}$$

se puede definir de manera continua en $(0,0)$.

Observemos que $Dom(f) = \{(x,y) : y \neq -2x\}$.

Retrinjamos el límite a las curvas $y = -2x + ax^2$ con $a \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x, -2x + ax^2) &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x\left(-2x + ax^2\right))}{ax^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(-2x^2 + ax^3)}{-2x^2 + ax^3} \frac{\left(-2x^2 + ax^3\right)}{ax^2} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(-2x^2 + ax^3)}{-2x^2 + ax^3} \left(\frac{-2}{a} + x\right) = \frac{-2}{a}.
\end{aligned}$$

Luego el límite no existe y por lo tanto f no se puede definir de manera continua en $(0,0)$.

Ejercicio 4: Decidir si la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^5+y^5+2x^3+2xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

es diferenciable en $(0,0)$. En caso afirmativo dar la ecuación del plano tangente en $(0,0)$.

Derivada parcial respecto de x en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^5+2h^3}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^5+2h^3}{h^3}=\lim_{h\to 0}h^2+2=2.$$

Derivada parcial respecto de y en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^5}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h^2=0.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\|(x,y)\|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^5+y^5+2x^3+2xy^2}{x^2+y^2}-2x}{\|(x,y)\|}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^5+y^5+2x^3+2xy^2-2x\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}}{\|(x,y)\|}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5+y^5+2x^3+2xy^2-2x\left(x^2+y^2\right)}{\|(x,y)\|^3}=$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5+y^5}{\|(x,y)\|^3}=0,$$

pues dado $\varepsilon>0$ basta tomar $\delta=\sqrt{\varepsilon/2}$ de modo tal que si $\|(x,y)\|<\delta$ resulta

$$\left|\frac{x^5+y^5}{\|(x,y)\|^3}-0\right|\leq\frac{|x|^5+|y|^5}{\|(x,y)\|^3}\leq\frac{\|(x,y)\|^5+\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^3}=2\,\|(x,y)\|^2<2\delta^2=\varepsilon.$$

Por lo tanto f resulta diferenciable en $(0,0)$ y la ecuación del plano tangente es

$$z=2x.$$